Les Eléments d'Euclide.
Manuscrit grec du
12e siècle.

Euclide (306 - 283 avant J-C) est un mathématicien grec vivant à Alexandrie et qui a rassemblé les connaissances de l'antiquité dans des livres appelés les "Eléments".

Etude de quelques propositions du livre I des *Eléments* d'Euclide, nécessaires à la compréhension de la démonstration de la proposition 47 (théorème de Pythagore).

Proposition 4

> Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

exercice

Illustrer cette proposition en construisant, avec rapporteur et compas, deux triangles ABΓ et ΔEZ tels que $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, AB = ΔE et AΓ = ΔZ.
Pensez-vous, comme Euclide, que les deux triangles soient **égaux** (c'est à dire, ici, superposables) ?
Voici le raisonnement d'Euclide :

> Car le triangle ABΓ étant appliqué sur le triangle ΔEZ, le point A étant posé sur le point Δ, et la droite AB sur la droite ΔE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à ΔE; mais AB étant appliqué sur ΔE, la droite AΓ s'appliquera sur ΔZ, parce que l'angle BAΓ est égal à l'angle EΔZ; donc le point Γ s'appliquera sur le point Z, parce que AΓ est égal à ΔZ; mais le point B s'applique sur le point E; donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ; car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point Γ sur le point Z, la base BΓ ne s'appliquait pas sur la base EZ, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6); donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ, et lui sera égale; donc le triangle entier ABΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔEZ, et lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ABΓ à l'angle ΔEZ, et l'angle AΓB à l'angle ΔZE.
> Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 41

> Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

Démontrez cette proposition,en utilisant vos souvenirs concernant le calcul de l'aire d'un triangle .

Proposition 47 du livre I des *Eléments* d'Euclide.

Enoncé et démonstration du **théorème de Pythagore**

propriété

$\boxed{\textit{Proposition 47}}$ *Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.*

(3) Soit *ABC* un triangle rectangle, que *BAC* soit l'angle droit; je dis que le carré du côté *BC* est égal aux carrés des côtés *BA*, *AC*.

dessin

(5) Décrivons avec *BC* le carré *BDEC*, et avec *BA*, *AC* les carrés *GB*, *HC* (c'est-à-dire *ABFG* et *ACKH*); et par le point *A* conduisons *AL* parallèle à l'une ou l'autre des droites *BD*, *CE*; et joignons *AD*, *FC*.

Démonstration

1) A, G, C alignés

B, A, H alignés

(8) Puisque chacun des angles *BAC*, *BAG* est droit, les deux droites *AC*, *AG*, non placées du même côté, font avec la droite *BA* au point *A* de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite *CA* est dans la direction de *AG*.

La droite *BA* est dans la direction *AH*, par la même raison.

2) ABD et FBC superposables (proportionnels)

(13) Et puisque l'angle *DBC* est égal à l'angle *FBA*, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun *ABC*, l'angle entier *DBA* sera égal à l'angle entier *FBC*.

Et puisque *DB* est égal à *BC*, et *FB* à *BA*, les deux droites *AB*, *BD* sont égales respectivement aux deux droites *FB*, *BC*; mais l'angle *DBA* est égal à l'angle *FBC*; donc la base *AD* est égale à la base *FC*, et le triangle *ABD* est égal au triangle *FBC* (4).

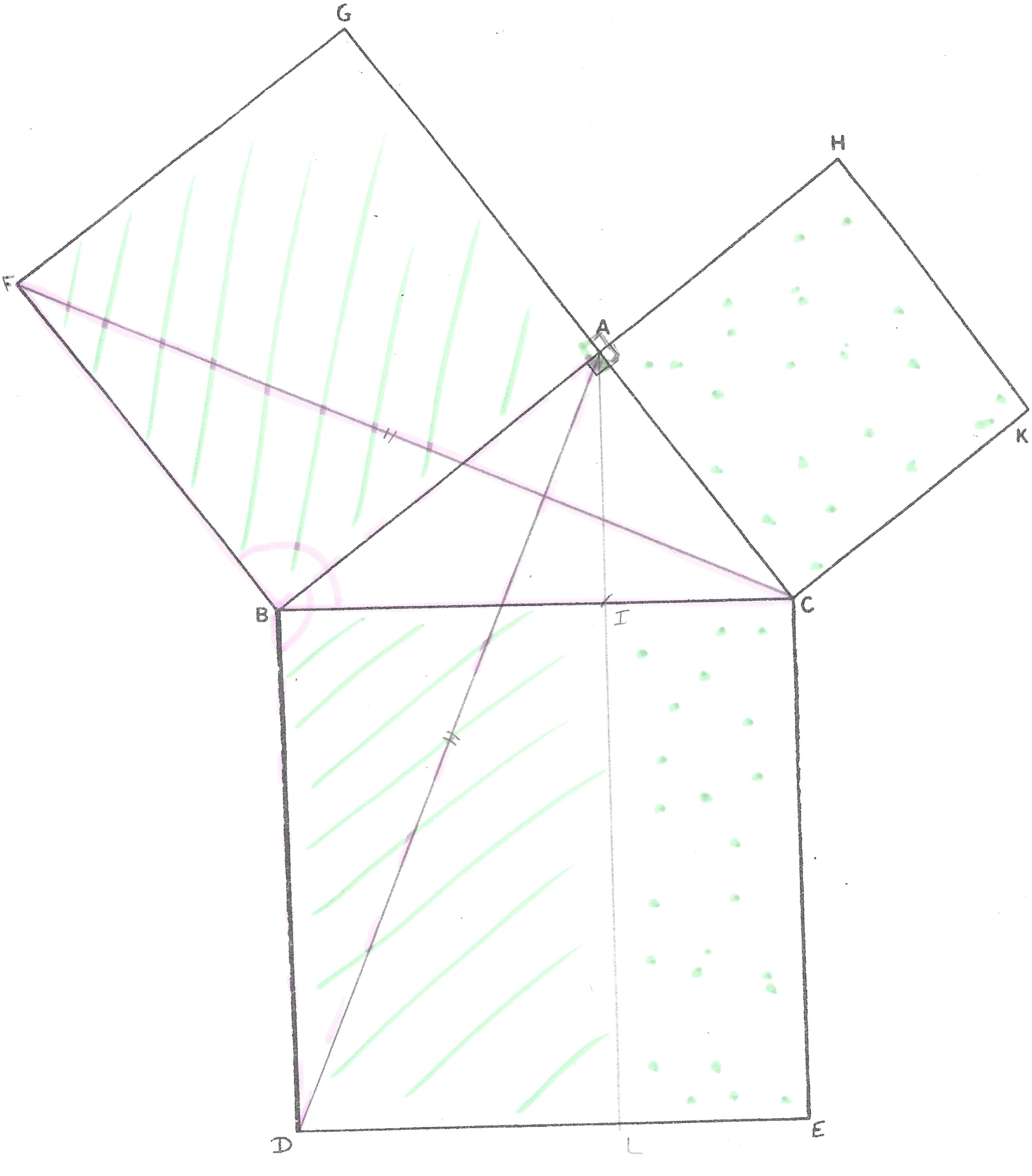
$\mathcal{A}_{BL} = 2\mathcal{A}_{ABD}$

(20) Mais le parallélogramme *BL* (→ BDLI) est double du triangle *ABD* (41), car ils ont la même base *BD* et ils sont entre les mêmes parallèles *BD*, *AL*; le carré *BG* (→ BFGA) est double du triangle *FBC*, car ils ont la même base *BF* et ils sont entre les mêmes parallèles *FB*, *GC*; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales sont égales entre elles; donc le parallélogramme *BL* est égal au
(25) carré *GB*. Ayant joint *AE*, *BK*, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme *CL* est égal au carré *HC*; donc le carré entier *BDEC* est égal aux deux carrés *GB*, *HC*.

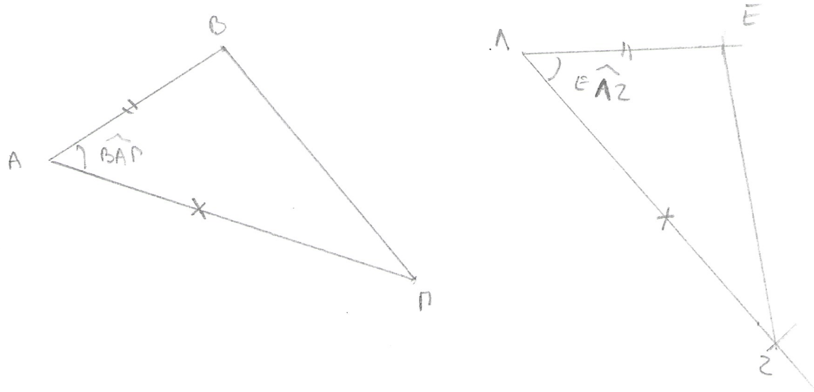
$\mathcal{A}_{CL} = \mathcal{A}_{HC}$ et $\mathcal{A}_{HC}$

conclusion

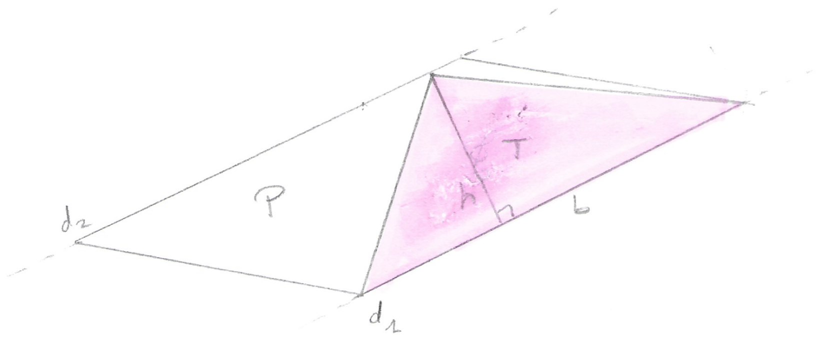
Mais le carré *BDEC* est décrit avec *BC*, et les carrés *GB*, *HC* sont décrits avec *BA*, *AC*; donc le carré du côté *BC* est égal aux carrés des côtés *BA*, *AC*. Donc dans les triangles, etc.


G
H
F
A
K
B
I
C
D
L
E

Proposition 4



Proposition 41



parallélogramme P
triangle T

$\mathcal{A}_P = b \times h \qquad \mathcal{A}_T = \frac{b \times h}{2}$ donc $\mathcal{A}_P = 2\mathcal{A}_T$